Colles de Maths - semaine 15
Lycée Aux Lazaristes

Julien Allasia - ENS de Lyon

Questions de cours

- Une famille de polynômes échelonnés en degré est libre.
- Caractérisation des sommes directes par l'intersection des espaces.
- Image et noyau sont des espaces vectoriels.
- Caractérisation de surjectivité (resp. injectivité) d'une application linéaire par l'image de familles génératrices (resp. libres).

Exercice 1 Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $f^5 = f$. Montrer que $E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$.
2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme tel que $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$. Soit $f \in (E)$ tel que $P(f) = 0$.
   Montrer que $E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$.

Exercice 2 Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $(x, f(x))$ est une famille liée pour tout $x \in E$.
   Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f = \lambda \operatorname{Id}$.
2. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall u \in \mathcal{L}(E)$, $u \circ f = f \circ u$.
   Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f = \lambda \operatorname{Id}$.

Exercice 3 Soit E l'ensemble des fonctions réelles $\mathcal{C}^\infty$ et 2π-périodiques. Soit u l'application linéaire qui à f dans E associe sa dérivée seconde.

1. Vérifier que E est un espace vectoriel réel.
2. Montrer que $E = \operatorname{Ker}(u) \oplus \operatorname{Im}(u)$.

Exercice 4 Montrer qu'il existe $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X],\ P(X) + \sum_{k=1}^{n} a_k\, P(X+k) = 0.$$

Exercice 5 Soit r un entier impair positif. Soit, pour $a \in \mathbb{R}$, $f_a : x \in \mathbb{R} \mapsto |x-a|^r$.
Montrer que la famille $\{f_a,\ a \in \mathbb{R}\}$ est libre dans l'espaces des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 6 Soit, pour $a \in \mathbb{R}$, $f_a : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{ax}$.
Montrer que la famille $\{f_a,\ a \in \mathbb{R}\}$ est libre dans l'espaces des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 7 Soit, pour $a \in \mathbb{R}_+^*$, $f_a : x \in \mathbb{R} \mapsto \cos(ax)$.
Montrer que la famille $\{f_a,\ a \in \mathbb{R}_+^*\}$ est libre dans l'espaces des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 8 Soit E un K-espace vectoriel, u, $v \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $u \circ v - v \circ u = u$.
Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u^k \circ v - v \circ u^k$ en fonction de u et v.